ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Петербургский государственный университет путей сообщения Императора АлександраI»
(ФГБОУ ВО ПГУПС)

Петрозаводский филиал ПГУПС

ОДОБРЕНО
на заседании цикловой комиссии ЕН
протокол № 8 от 28 апреля 2017 г.
Председатель цикловой комиссии:
Михайлова Т.А. (   )

УТВЕРЖДАЮ
Начальник УМО
______________ А.В. Калько
«28» 04 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по организации и проведению практических занятий

По учебной дисциплине: «Математика»

Специальность: для всех специальностей

Разработчик: Писаренко А.С.

2017 г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по организации и проведению практических занятий разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» и предназначено для выполнения практических занятий обучающимися.

Практические занятия по учебной дисциплине направлены на формирование личностных, метапредметных и предметных результатов, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины.

Освоение содержания учебной дисциплины обеспечивает достижение студентами следующих результатов:

- предметных:

1) сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

2) сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

3) владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

4) владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

5) сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

6) владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

7) сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

8) владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач;

Рабочей программой предусмотрено выполнение обучающимися практических занятий, включая, как обязательный компонент практические задания с использованием персонального компьютера.

Распределение результатов освоения учебного материала в ходе выполнения заданий на практических занятиях происходит в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1 – Распределение результатов освоения учебного материала

Раздел, тема	**Контрольно-**	**Ко**	**Результаты**

	оценочные мероприятия		**Предметные**
Раздел 1. Развитие понятия о числе	**Практическое занятие №1** «Приближенные вычисления»	**2**	сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке;
Раздел 2. Корни, степени и логарифмы	**Практическое занятие № 2** «Действия со степенями и логарифмами»	**2**	владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.
Раздел 3. **Прямые и плоскости в пространстве**	**Практическое занятие №3** «Решение задач по теме «Прямые и плоскости в пространстве»»	**2**	сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий; владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
Раздел 4. Координаты и векторы	**Практическое занятие №4** «Использование координат и векторов при решении прикладных задач»	**2**	владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
Раздел 5. Основы тригонометрии	**Практическое занятие№5** «Решение тригонометрических задач»	**2**	владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.
Раздел 6. Функции, их свойства и графики. Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции	**Практическое занятие № 6** «Преобразование графиков функций»	**2**	владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств; владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.
Раздел 7. Многогранники	**Практическое занятие №7** «Решение стереометрических задач»	**2**	сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий; владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных

			свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
Раздел 8. **Тела и поверхности вращения**	**Практическое занятие №8** «Вычисление площадей поверхностей геометрических тел»	**2**	сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий; владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
Раздел 9. **Начала математического анализа**	**Практическое занятие№9** «Применение производной к исследованию функций и построению графиков»	**2**	сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей; владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.
Раздел 10. **Измерения в геометрии**	**Практическое занятие №10** «Вычисление объемов поверхностей геометрических тел»	**2**	сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий; владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
Раздел 11 **Элементы комбинаторики**	**Практическое занятие №11** «Решение комбинаторных задач»	**2**	сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;
Раздел 12 **Элементы теории вероятностей. Элементы математической статистики**	**Практическое занятие №12** «Решение простейших задач теории вероятности и математической статистики»	**2**	сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

Содержание практических занятий охватывает весь круг предметных результатов, на формирование которых направлена учебная дисциплина.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

<u>Практическое занятие №1</u>

«Приближенные вычисления»

<u>Практическое занятие № 2</u>

«Действия со степенями и логарифмами»

<u>Практическое занятие №3</u>

«Решение задач по теме «Прямые и плоскости в пространстве»»

<u>Практическое занятие №4</u>

«Использование координат и векторов при решении прикладных задач»

<u>Практическое занятие№5</u>

«Решение тригонометрических задач»

<u>Практическое занятие № 6</u>

«Преобразование графиков функций»

<u>Практическое занятие №7</u>

«Решение стереометрических задач»

<u>Практическое занятие №8</u>

«Вычисление площадей поверхностей геометрических тел»

<u>Практическое занятие№9</u>

«Применение производной к исследованию функций и построению графиков»

<u>Практическое занятие №10</u>

«Вычисление объемов поверхностей геометрических тел»

<u>Практическое занятие №11</u>

«Решение комбинаторных задач»

<u>Практическое занятие №12</u>

«Решение простейших задач теории вероятности и математической статистики»

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

При оценке освоенных предметных результатов при выполнении практических работ применяется пятибалльная шкала оценивания.

Оценивание практических занятий производится в соответствии со следующими нормативными актами:

- Положение о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся;
- Положение о планировании, организации и проведении лабораторных работ и практических занятий.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

Тема: «Приближенные вычисления»

Цель работы:

- формировать у студентов знания, умения и навыки работы с приближенными числами в применении формул погрешностей элементарных действий и функций, нахождения значений выражений по способу границ и методом строгого учета абсолютных погрешностей после каждой операции.

Оборудование и принадлежности: листы формата А 4 для практических работ.

Руководство по выполнению заданий .

Приближенные вычисления с помощью правил подсчета цифр

I. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном, данном с наименьшим числом десятичных знаков.
Пример. Найти сумму приближенных чисел 127,42; 67,3; 0,12 и 3,03.

Решение: 127,42 + 67,3 + 0,12 + 3,03 = 197,87   197,9

Пример. Найти разность чисел: 418,7 - 39,832 = 378,868   378,9

II. При умножении и делении приближенных чисел в произведении надо сохранить столько значащих цифр, сколько их есть в данном числе с наименьшим количеством значащих цифр.
Пример. Умножить приближенные числа 3,4 и 12,32.

Решение: 3,4 x 12,32 = 41,888   42

Задача. Площадь прямоугольной грядки приближенно равна 7,6 кв. м, ширина -2,38 м. Чему равна ее длина?
Решение. Длина грядки равна частному от деления 7,6 на 2,38.

Действие деления выполняют так: 7,60 : 2,38 = 3,19   3,2(м)
Последнюю цифру частного 9 можно было и не писать, а, получив в частном две значащие цифры, заметив, что остаток больший половины делителя, округлить частное с избытком.

III. При возведении приближенных чисел в квадрат, и куб в результате сохраняется столько значащих цифр, сколько их в основании.
Примеры.
$2{,}3^2 = 5{,}29 \approx 5{,}3$;
$0{,}8^3 = 0{,}512 \approx 0{,}5$.

IV. В промежуточных результатах следует брать одной цифрой больше, чем рекомендуют предыдущие правила.

V. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при действиях первой ступени) или больше значащих цифр (при действиях II и III ступеней), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну запасную цифру.

VI. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с k цифрами данные следует брать с таким числом цифр, которое дает согласно правилам I - IV $k + 1$ цифру в результате.

Применение правил. Применение вычислений способом подсчета цифр рассмотрим на примере.

Пример. Найти значение $x = \frac{(a-b)c}{a+b}$, если $a \approx 9{,}31$, $b \approx 3{,}1$, $c \approx 2{,}33$.
Решение.
$a - b = 9{,}31 - 3{,}1 = 6{,}21$;
$(a - b)\,c = 6{,}21 \cdot 2{,}33 \approx 14{,}5$;
$a + b = 9{,}31 + 3{,}1 = 12{,}4$;
$x = 14{,}5 : 12{,}4 \approx 1{,}2$.
Ответ. $x \approx 1{,}2$.

Примечание. Сформулированные выше правила подсчета цифр имеют вероятностный смысл: они наиболее вероятны, хотя существуют примеры, не удовлетворяющие этим правилам. Поэтому вычисления способом подсчета цифр - самый грубый способ оценки погрешности результатов действий. Однако он очень прост и удобен, а точность таких вычислений вполне достаточна для большинства технических расчетов. Поэтому этот способ широко распространен в вычислительной практике. В более ответственных вычислениях пользуются способом границ или способом граничных погрешностей.

Наилучшим в смысле строгости из известных способов приближенных вычислений является способ границ. Пользуясь этим способом, по известным нижним и верхним границам данных чисел, находят отдельно нижнюю и верхнюю границы результата.

Пусть, например, надо сложить два числа:

$x \approx 3{,}2\ (\pm 0{,}05)$ и $y \approx 7.9\ (\pm 0{,}05)$.

Имеем: $3{,}15 < x < 3{,}25$, $7{,}85 < y < 7{,}95$, откуда $11{,}00 < x + y < 11{,}20$.

Итак, $x + y \approx 11{,}1\ (\pm 0{,}1)$.

Вообще, нижняя граница суммы приближенных чисел равна сумме нижних границ слагаемых, а верхняя - сумме верхних границ слагаемых. Символически это можно записать так:

НГ $(x + y)$ = НГ x + НГ y ; ВГ $(x + y)$ = ВГ x + ВГ y .

Аналогичные правила справедливы для умножения:

НГ (xy) = НГ $x \cdot$ НГ y ; ВГ $(x$ y) = ВГ $x \cdot$ ВГ y .

Для обратных действий - вычитания и деления - соответствующие правила имеют такой вид:

НГ $(x - y)$ = НГ x - ВГ y ; ВГ $(x - y)$ = ВГ x - НГ y.

$$\text{НГ}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\text{НГ}x}{\text{ВГ}y}; \quad \text{ВГ}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\text{ВГ}x}{\text{НГ}y}$$

Из определения НГ и ВГ вытекают также следующие правила:

1) округлять НГ можно только по недостатку, а ВГ - по избытку;

2) чем меньше разность ВГ x - НГ x, тем точнее определяется x ;

3) в качестве приближенного значения x рекомендуется брать среднее арифметическое чисел НГ x и ВГ x или число, близкое к нему.

Применение способа границ при вычислениях рассмотрим на примере.

Пример. Найти значение $x = \frac{(a-b)c}{a+b}$

если $a \approx 9{,}21\ (\pm 0{,}01)$; $b \approx 3{,}05\ (\pm 0{,}02)$, $c \approx 2{,}33\ (\pm 0{,}01)$.

Решение. Определяем НГ и ВГ каждого из чисел a , b , c и, выполнив над ними соответствующие действия, находим НГ и ВГ числа x.

Запись удобно оформить в виде такой таблицы:

Компоненты	НГ	ВГ
a b c $a - b$	9,20	9,22
$(a - b) c$	3,03	3,07
$a + b$ x	2,32	2,34
	6,13	6,19
	14,22	14,49
	12,23	12,29
	1,15	1,19

$1{,}15 < x < 1{,}19$,

$1{,}15 + 1{,}19 = 2{,}34$; $1{,}19 – 1{,}15 = 0{,}04$

$2{,}34 : 2 = 1{,}17$; $0{,}04 : 2 = 0{,}02$

$x \approx 1{,}17\ (\pm 0{,}02)$.

ЗАДАНИЕ:

1. 1) Площадь океанов равна:
Тихого....................... ..179 679 тыс. кв. км
Атлантического............93 363 » » »
Индийского ....74 917 » » »
Северного Ледовитого..13 100 » » »
Вычислить общую площадь этих океанов в миллионах квадратных километров, округлив данные в условии числа.
2) Округлить до тысяч следующие числа: 10 834 650; 4 354 160; 4 793 500; 6 381 480. Вычислить погрешность, допущенную при округлении.
3) Округлить до целых единиц следующие дробные числа: 228,7; 142,61; 374,4; 92,5; 93,5; $7^2/_3$; $4^1/_5$. Вычислить погрешность, допущенную при округлении.
4) Округлить до десятых долей следующие дробные числа: 12,39; 87,15; 279,68; 156,44; 60,52; 3,25; 1,408. Вычислить погрешность, допущенную при округлении.

2. 1) Вычислить приближённые частные с точностью до целой единицы:
15139 : 25; 78,66 : 0,13; 78,66 : 0,013.
2) Вычислить приближённые частные с точностью до 0,1:
14 : 3; 5,4 : 1,7; 15,4 : 4.
3) Вычислить приближённые частные с точностью до 0,01 :
417 : 35; 17,51 : 6; 2,25 : 0,07; 39,5 :1,3.

3. Сколько квадратных километров площади приходится на одного жителя каждой из указанных частей света, если:
в Азии на 43 883 тыс. кв. км площади приходится 1 535 000 тыс. человек,
в Африке на 30 284 тыс. кв. км площади приходится и 224 000 тыс. человек,
в Европе на 10 498 тыс. кв. км площади приходится 569 000 тыс. человек.
Вычисления произвести с точностью до 0,01 кв. км.

4. Древнегреческий учёный Архимед установил, что отношение длины окружности к её диаметру больше числа $3^{10}/_{71}$ и меньше $3^1/_7$. Вычислить значения этих дробей с точностью до 0,01.

5. Выразить приближённо десятичной дробью число $5^2/_7$ с тремя верными цифрами. Вычислить абсолютную погрешность полученного приближённого значения.

6. Сравним время на стенных и ручных часах. Пусть стенные часы показывают 2 часа 14 мин. (пополудни). Можно ли считать цифру 4 верной?
Пусть ручные часы в тот же момент показали 2 часа 13 мин. 15 сек. Можно ли считать цифру 5 верной? При решении задачи предполагается, что те и другие часы правильны.

7. 1) Одна из старых русских мер длины—аршин (1 аршин ≈ 71,12 см) выражала приближённо длину шага взрослого человека. Если принять 1 аршин приближённо за 71 см, то какова получится абсолютная погрешность? (Значение 71,12 см при решении задачи примите за точное выражение аршина в метрических мерах.)
2) Одна из старых русских мер веса — пуд — приближённо равна 16,38 кг. Если принять, что 1 пуд ≈ 16,4 кг, то чему равна абсолютная погрешность? (Число 16,38 кг при решении задачи примите за точное выражение пуда в метрических мерах.)

8. Чтобы найти количество зёрен в 1 кг ржи, берут пять проб по 10 г каждую, и подсчитывают в каждой количество зёрен. Пусть при подсчетах получились числа: 308, 336 327, 343 и 316. Подсчитайте среднее количество зёрен в 10 г ржи. Установите верные цифры полученного среднего значения. Для проверки верных цифр числа зёрен в 10 г ржи вычислите разность между значениями каждой пробы и найденным средним. Найдите среднее арифметическое этих разностей и по цифре старшего разряда его проверьте правильность взятых верных цифр в среднем значении числа зёрен в 10 кг ржи. Чему считается равной в данном случае абсолютная погрешность результата? Сколько зёрен ржи содержится в 1 кг ржи?

9. Ученик решил подсчитать число шагов, которое он делает на пути из дома в школу. Один раз он насчитал 950 шагов, другой 938 и в третий—965 шагов. Найдите среднее арифметическое этих чисел. Вычислите разность между каждым значением слагаемых и средним. Найдите среднее арифметическое вычисленных разностей. Укажите верные цифры приближённого значения числа шагов.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

Тема: «Действия со степенями и логарифмами»

Цель работы:

- закрепить умение выполнять действия со степенями
- научиться логарифмировать и потенцировать выражения
- отработать навыки упрощения выражений

Оборудование и принадлежности: листы формата А 4 для практических работ.

Руководство по выполнению заданий .

Вспомним свойства степени с рациональным показателем.

$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}=a^n$ для натурального n

a^n – степень; a – основание степени; n – показатель степени.

Для степени с рациональным показателем n:

$a>0 \quad a^n>0$	$(abc)^n=a^nb^nc^n$
$a<0\begin{cases} n-четн. & a^n>0 \\ n-нечет. & a^n<0\end{cases}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$
$a^0=1$	$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$
$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$
$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$	$a^m:a^n=a^{m-n}$

(прочесть свойства словами, а также справа налево)

Пример 1. Вычислите: $7^{-1}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-64^{-\frac{1}{2}}\cdot3^{-2}$

Решение: упростим заданное выражение, использую свойства степеней:

$$7^{-1}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-64^{-\frac{1}{2}}\cdot3^{-2}=\frac{1}{7}\cdot49^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{7}\sqrt{49}-\sqrt{\frac{1}{64}}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{7}\cdot7-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}=$$

$$=1-\frac{1}{72}=\frac{72}{72}-\frac{1}{72}=\frac{71}{72}.$$

Пример 2.

Упростите: $\frac{2a^3b^8c^4}{6a^4b^{-3}c^5}$.

Решение: используя свойства степеней, имеем: $\frac{2a^3b^8c^4}{6a^4b^{-3}c^5}=\frac{a^{3-4}b^{8-(-3)}c^{4-5}}{3}=\frac{a^{-1}b^{11}c^{-1}}{3}=\frac{b^{11}}{3ac}$.

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени (x), в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b, т.е. $log_ab=x \rightarrow a^x=b$.

При работе с логарифмами применяются следующие их свойств, вытекающие из свойств показательной функции:

1. $a^{log_ab}=b$ (где $b>0$, $a>0$ и $a\neq0$) называют *основным логарифмическим тождеством*.

При любом $a>0$ ($a\neq0$) и любых положительных x и y выполняются равенства:

2. $log_a1=0$.
3. $log_aa=1$.
4. Логарифм произведения равен сумме логарифмов: $log_axy=log_ax+log_ay$.

5. Логарифм частного равен разности логарифмов: $log_a(x/y)=log_ax-log_ay$.
6. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени: $log_ax^k=klog_ax$.
Наиболее употребительны таблицы десятичных и натуральных логарифмов (*десятичными* называют логарифмы по основанию 10 и обозначают *lg*, а *натуральными* логарифмами называют логарифмы по основанию *e*~2,72 и обозначают *ln*).

Пример 3.1
Вычислите: $(lg72-lg9)/(lg28-lg7)$.
Решение: используя 5 и 6 свойства логарифмов, вычисляем

$$lg72-lg9=lg(72/9)=lg8=lg2^3=3lg2;$$
$$lg28-lg7=lg(28/7)=lg4=lg2^2=2lg2.$$

Итак,

$$(lg72-lg9)/(lg28-lg7)=(3lg2)/(2lg2)=3/2=1,5.$$

Пример .3.2

Вычислите $\log_{\frac{2}{3}} 2,25$
Решение: Перейдем от записи логарифма к степени, далее пользуемся свойствами степеней

$$\log_{\frac{2}{3}} 2,25=x;\quad \left(\frac{2}{3}\right)^x=2\frac{1}{4};\quad \left(\frac{2}{3}\right)=\frac{9}{4};\quad \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^2;\quad \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2};\quad \Rightarrow\ x=-2$$

Действие нахождения логарифма числа называется действием логарифмирования.
Рассмотрим на примере.
Пусть дано число в общем виде

$$x=\frac{a^3\cdot b^2\cdot\sqrt[5]{(a+b)^2}}{(a-b)^4\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$$

Найдём логарифм числа x, используя свойства логарифмов (логарифм дроби, произведения, степени при любом основании)
Так как можно находить логарифм при любом основании, то договорились основание не писать.

$$\log x=\log\left(a^3\cdot b^2\sqrt[5]{(a+b)^2}\right)-\log\left((a-b)^4\cdot\sqrt{a^2+b^2}\right)=\log a^3+\log b^2+\log\sqrt[5]{(a+b)^2}-\log(a-b)^4-$$
$$-\log\sqrt{a^2+b^2}=3\log a+2\log b+\frac{2}{5}\log(a+b)-4\log(a-b)-\frac{1}{2}\log\left(a^2+b^2\right)$$

Однако так подробно не следует каждый раз расписывать, а сразу следует применять свойства логарифмов и писать результат.

Пример 4. Прологарифмируйте:

$$x=\frac{2a^{-5}b^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{(a-b)^2}}{3(a-b)^4}$$

Решение: Пользуясь свойствами логарифмов, записываем результат:

$$\log x=\log 2-5\log a+\frac{2}{3}\log b+\frac{2}{3}\log(a-b)-\log 3-4\log(a-b)$$

Действие нахождения числа по его логарифму называется действием потенцирования.
Как видно: потенцирование – есть обратное действие логарифмированию.

Знак минус говорит о том, что число представлено дробью, коэффициенты перед логарифмом – показатели степени.

Пример 5. $\log x = \frac{2}{5}\log(a+b) - 2\log a - \frac{1}{2}\log b$

Решение: применяем свойства логарифмов в «обратную» сторону

И тогда $x = \frac{(a+b)^{\frac{2}{5}}}{a^2 \cdot b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[5]{(a+b)^2}}{a^2 \cdot \sqrt{b}}$;

Контрольные вопросы:

1. Свойства степеней
2. Что называется логарифмом числа?
3. Какое действие называется действием логарифмирования? Потенцирования?
4. Свойства логарифмов?
5. Какие логарифмы называются десятичными? Натуральными?

ЗАДАНИЕ:

Задания для самостоятельной работы:

1. Вычислите: $49^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} + 2^{-1} \cdot (-2)^{-2}$
2. Выполните действия:

   $а)\ \frac{2a^3x^5}{3b^2y^4} \cdot \frac{6ay^3}{5bx^4} \cdot \frac{by}{a^2x^2}$

   $б)\ a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{3}{2}}$
3. Упростите выражение:

   $\frac{m-n}{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}} - \frac{m^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}}{m-n}$
4. Вычислите: $а)\ 5^{-6\log_5 2}$

   $б)\ \log_{\frac{8}{27}} \frac{81}{16}$

   $в)\ \frac{\lg 4}{\lg 64 - \lg 8}$
5. Прологарифмируйте: $x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-p}$
6. Найдите x, если:

   $\lg x = 5\lg 7 - 2\lg 3 + \frac{1}{2}\lg 2$

ЗАДАНИЕ:

Задания для самостоятельной работы:

1. Вычислите: $\frac{1}{10}^{-5} \cdot 10^{-2} + \frac{0{,}5^{-2} - \left(\frac{2}{7}\right)^0 \cdot}{(-2)^{-2}}$
2. Выполните действия:

   $а)\ \frac{5a^4x^5}{3b^2y^2} \cdot \frac{9ay^2}{7bx^5} \cdot \frac{by}{a^8x^3}$

   $б)\ a^{\frac{5}{2}}b^{-\frac{7}{5}}c^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{5}}c^{-\frac{1}{2}}$
3. Упростите выражение: $\frac{3a^{\frac{1}{2}} - a}{3 - a^{\frac{1}{2}}}$
4. Вычислите: $а)\ 7^{-\log_7 9}$

   $б)\ \log_{\frac{8}{27}} \frac{3}{4}$

   $в)\ \log_{\frac{1}{12}} 144 - \lg 1000$
5. Прологарифмируйте: $x = \left(\frac{5}{u}\right)^q$
6. Найдите x, если:

   $\log y = \frac{2}{5}\log a + \frac{1}{15}\log(b+c) - \frac{3}{5}\log(a+b) + \frac{2}{5}\log b$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

Тема: «Решение задач по теме «Прямые и плоскости в пространстве»»

Цель работы:

- закрепить навыки применения полученных теоретических знаний по теме «Прямые и плоскости в пространстве» при решении задач.
- Научиться находить расстояние от точки до плоскости и до прямой; находить угол между прямой и плоскостью; применять теорему о трех перпендикулярах; находить длину наклонной и её проекции на плоскость.

Оборудование и принадлежности: листы формата А 4 для практических работ.

Руководство по выполнению заданий .

Повторение теоретических основ:

Признаки параллельности прямой и плоскости

1) Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

2) Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Прямая и плоскость параллельные между собой

Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если прямая (*AB*) параллельна какой-нибудь прямой (*CD*), расположенной в плоскости (*P*), то она параллельна самой плоскости.

Если плоскость (*R*) проходит через прямую (*AB*), параллельную другой плоскости (*P*), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения (*CD*) параллельна первой прямой (*AB*).

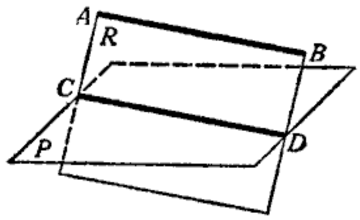
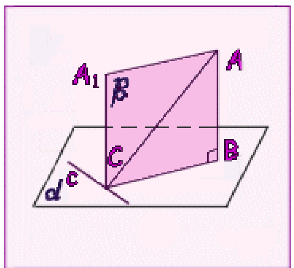


Рисунок 1. Прямая и плоскость параллельные между собой



Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна наклонной.

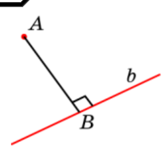
И обратно: Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

Угол между прямой и плоскостью — это угол между ***прямой и ее проекцией на данную плоскость.***

Расстояние от точки до плоскости — равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

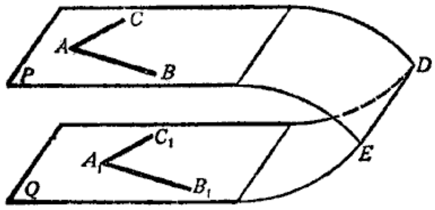


Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой.

Параллельные плоскости

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если две пересекающиеся прямые (AB и AC) одной плоскости (P) соответственно параллельны двум прямым (A_1B_1 и A_1C_1) другой плоскости(Q), то эти плоскости параллельны. Прямые AB и AC параллельны плоскости Q.



Признаки параллельности прямых в пространстве

1) Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

2) Если в одной из пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то она параллельна линии пересечения плоскостей.

Признаки параллельности плоскостей

1) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

2) Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте признаки параллельности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте признаки параллельности плоскостей.
3. Сформулируйте признаки параллельности прямых в пространстве.

ЗАДАНИЕ:

Вариант 1.

1. Из точки А проведены к плоскости α наклонная АВ, образующая с плоскостью угол 30°, и перпендикуляр AN длиной 20 см. Найдите длину наклонной АВ.

2. Из вершины А прямоугольника ABCD восстановлен перпендикуляр АК к плоскости прямоугольника. Найдите расстояние от вершины К перпендикуляра до вершины А прямоугольника, если известны расстояния от точки К до трех других вершин прямоугольника:
$KB = 9$ см, $KC = 12$ см, $KD = 8$ см.

3. Из данной точки к плоскости проведены две равные наклонные длиной 2 м. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если наклонные образуют угол 60°, а их проекции на плоскость перпендикулярны.

ЗАДАНИЕ:

Вариант 2.

1. Из точки А проведена к плоскости α наклонная АВ длиной 10 см, образующая угол 30° с плоскостью. Найдите расстояние от точки А до плоскости.

2. Катеты прямоугольного треугольника АВС равны 4 см и 3 см. Через вершину прямого угла С треугольника АВС проведен перпендикуляр СМ к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки М до гипотенузы треугольника, если длина СМ равна 2,6 см.

3. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние 1 м, проведены две равные наклонные. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если известно, что наклонные перпендикулярны и образуют с перпендикуляром к плоскости углы, равные 60°.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

Тема: «Использование координат и векторов при решении прикладных задач»

Цель работы:

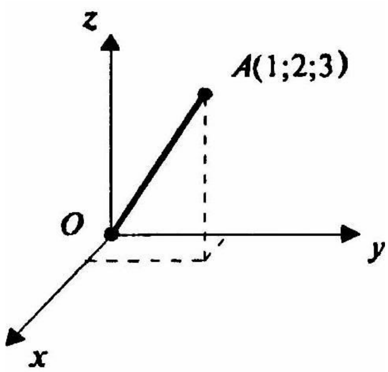
- закрепить навыки применения правил действий над векторами при решении математических и прикладных задач.

Оборудование и принадлежности: листы формата А 4 для практических работ.

Руководство по выполнению заданий .

Теоретические сведения:

1)Инструкция по построении точки с тремя координатами:



1. Постройте три координатные плоскости, чтобы иметь начало отсчета в точке О. На чертеже плоскости проекций обозначаются в виде трех осей – ох, оу и oz, причем ось oz направлена вверх, ось оу – вправо. Чтобы построить последнюю ось ох, разделите угол между осями оу и oz напополам (если вы рисуете на листе в клетку, просто проведите эту ось по диагоналям клеток).
2. Обратите внимание, если координаты точки А записаны в виде трех чисел в скобках (a, b, c), то первое число a – расстояние от плоскости x, второе b – от y, третье c – от z. Сначала возьмите первую координату a и отметьте ее на оси ох, влево и вниз, если число a положительное, вправо и вверх, если оно отрицательное. Полученную букву назовите В.
3. Далее возьмите число b и отложите его на оси оу – вправо, если оно положительное, и влево, если оно отрицательное. Назовите отмеченную точку буквой С.
4. Затем отложите последнее число c вверх по оси oz, если оно положительное, и вниз по этой же оси, если отрицательное. Отметьте полученную точку буквой D.
5. Из полученных точек проведите следы проекций искомой точки на плоскостях. То есть в точке В проведите две прямые, которые будут параллельны осям оу и oz, в точке С проведите прямые, параллельные осям ох и oz, в точке D – прямые, параллельные ох и оу.
6. Две прямые, проведенные в одной плоскости, пересекутся. Восстановите в этом месте перпендикуляр (от всех трех плоскостей), чтобы найти искомую точку. В результате вы получите чертеж параллелепипеда, отметьте точку буквой А. Проверьте, расстояния до плоскостей этой точки равны a, b, c.
7. Если одна из координат точки равна нулю, значит, точка лежит в одной из плоскостей проекций. В таком случае просто отметьте известные координаты на плоскости и найдите точку пересечения их проекций. Будьте внимательны при построении точек с координатами (a, 0, c) и (a, b, 0), не забывайте, что проекция на ось ох осуществляется под углом в 45.

2) Формула вычисления расстояния между двумя точками **A(x_a, y_a, z_a) и B(x_b, y_b, z_b) в пространстве:** $AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$

Формула вычисления координат середины отрезка с концами A(xa, ya, za) и B(xb, yb, zb) в пространстве:

$$xc = \frac{xa + xb}{2} \qquad yc = \frac{ya + yb}{2} \qquad zc = \frac{za + zb}{2}$$

3) Найдем уравнение сферы радиуса R с центром в точке O1(x0;y0;z0). Согласно определению сферы расстояние любой ее точки M(x; y; z) от центра O1(x0;y0;z0) равно радиусу R, т. е. O1M= R. Но $O_1M = |\overline{O_1M}|$, где $\overline{O_1M} = (x - x_0;\ y - y_0; z - z_0)$. Следовательно,

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

или

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.}$$

Это и есть искомое уравнение сферы. Ему удовлетворяют координаты любой ее точки и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на данной сфере.
Если центр сферы O1 совпадает с началом координат, то уравнение сферы принимает вид $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

4) Формула длины вектора для пространственных задач

В случае пространственной задачи модуль вектора $a = \{a_x ; a_y ; a_z\}$ можно найти воспользовавшись следующей формулой:

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

5) Орт координатной оси Ox обозначается через $\bar{i}$, оси Oy - через $\bar{j}$, оси Oz - через $\bar{k}$ (рис. 1).

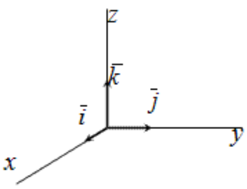


Рис. 1

Для любого вектора $\bar{a} = (a_x; a_y)$, который лежит в плоскости xOy, имеет место следующее разложение: $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$

Если вектор $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ расположен в пространстве, то разложение по ортам координатных осей имеет вид: $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$

6) *Скалярным произведением двух векторов* называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\overrightarrow{ab}$ (порядок записи сомножителей безразличен, то есть $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ba}$).

Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначить через φ, то их скалярное произведение можно выразить формулой:

$$\overrightarrow{ab} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi\ .$$

Из формулы $\overrightarrow{ab} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$ следует, что $\overrightarrow{ab} > 0$, если φ – острый угол, $\overrightarrow{ab} < 0$, если φ – тупой угол; $\overrightarrow{ab} = 0$ в том и только в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора и обозначается символом $\vec{a}^2$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то их скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Отсюда следует необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Угол φ между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ задается формулой $\cos\phi = \dfrac{\overrightarrow{ab}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$, или в координатах $\cos\phi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

7) пример.

Доказать, что треугольник *ABC*: *A*(-3; -3), *B*(-1; 3), *C*(11; -1) – прямоугольный.

Решение:

вычислим длины сторон треугольника по формуле:

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2},$$

$$AB = \sqrt{(-1+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40},$$

$$BC = \sqrt{(11+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{160},$$

$$AC = \sqrt{(11+3)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{200}.$$

Т.к. AB^2=40, BC^2=160, AC^2=200, то $AB^2+BC^2=AC^2$.

Т.е., сумма квадратов длин двух сторон треугольника равна квадрату длины третьей стороны. Из этого следует, что треугольник *ABC* прямоугольный и сторона *AC* является его гипотенузой.

Контрольные вопросы:

1. Как построить координату точки в трехмерном пространстве?
2. Как найти середину отрезка, если заданы координаты его концов?
3. Как вычислить скалярное произведение векторов?

ЗАДАНИЕ: **Вариант 1**

1. Постройте точки $A(2,-1,3)$ $B(0,2,3)$ $C(0,0,-2)$ и $D(2,1,0)$. Определите их местоположение в пространстве.
2. Даны точки $M(-6,5,-2)$ и $N(2,1,4)$. Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка MN.
3. Напишите уравнение сферы с центром в точке C(1,-1,-2) и проходящей через точку A(0,3,-2)
4. Найдите длину вектора $\overrightarrow{PQ}$, если Q(-2,6,3) и P(2,5,-5)
5. Разложите по ортам векторы: $\overrightarrow{m}\ (15,-5,10)$ *и* $\overrightarrow{n}\ (4,0,-3)$.
6. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если:

   а) $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 5,\ \varphi = 30^0\ \left(\cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   б) $\vec{a}(4,\ 0,\ 6),\ \ \vec{b}\ (-3,\ 2,\ 3)$

   в) $|\vec{a}| = \sqrt{3},\ |\vec{b}| = \dfrac{2}{3}\ \ \varphi = 90^0\ \ (\cos 90^0 = 0)$

   г) $\vec{a}(5,\ 2,\ 3),\ \ \vec{b}\ (-1,\ 0,\ 7)$
7. Координаты вершин треугольника A(-2,0,1), B(-1,1,2) и C(0,2,-1). Найдите длины сторон и длины медиан этого треугольника.

ЗАДАНИЕ: **Вариант 2**

1. точки $A(3,-2,1)$ $B(0,-4,1)$ $C(0,0,3)$ и $D(5,-1,0)$. Определите их местоположение в пространстве.
2. Даны точки $M(4,2,-2)$ и $N(-3,2,1)$. Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка MN.
3. Напишите уравнение сферы с центром в точке C(2,-4,7) и R=3
4. Найдите длину вектора $\overrightarrow{PQ}$, если Q(3,-2,-1) и P(1,2,-5)
5. Разложите по ортам векторы: $\overrightarrow{m}\ (10,-3,7)$ *и* $\overrightarrow{n}\ (0,2,-2)$.
6. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если:

   а) $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 7,\ \varphi = 30^0\ \left(\cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   б) $\vec{a} = (4;-2;4)$ и $\vec{b} = (6;-3;2)$

   в) $|\vec{a}| = \sqrt{5},\ |\vec{b}| = \dfrac{4}{3}\ \ \varphi = 90^0\ \ (\cos 90^0 = 0)$

   г) $\vec{a}(10,\ 4,\ 6),\ \ \vec{b}\ (-2,\ 0,\ 14)$
7. Даны вершины A(2; -1; 4), B(3; 2; -6), C(-5; 0; 2) треугольника. Найдите длины сторон и длины медиан этого треугольника.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

Тема: «Решение тригонометрических задач»

Цель работы:

- ❖ Закрепить умение переводить значения углов из градусов в радианы и обратно
- ❖ Научиться пользоваться таблицей основных значений тригонометрических функций
- ❖ Закрепить умение решать основную задачу тригонометрии

Оборудование и принадлежности: листы формата А 4 для практических работ.

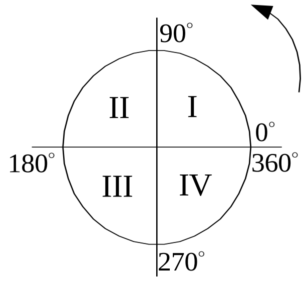
Руководство по выполнению заданий .

Теоретические сведения:

Для перехода от градусной меры измерения угла к радианной и наоборот можно пользоваться формулами:

$$360^\circ - 2\pi$$

$$A^\circ - \alpha \text{ рад} \Rightarrow A^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}; \quad \alpha = \frac{A^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$



Основные тригонометрические тождества

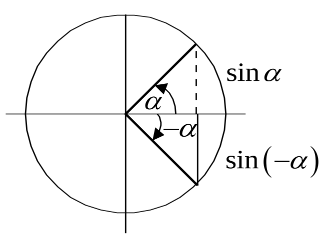
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1 \quad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$$

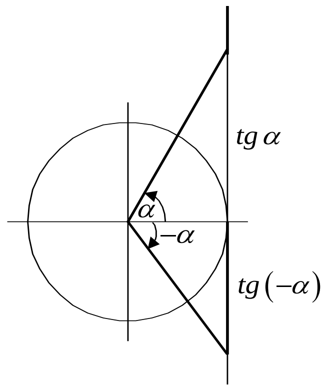
Знаки функций по четвертям

	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$tg\,\alpha$	+	–	+	–
$ctg\,\alpha$	+	–	+	–

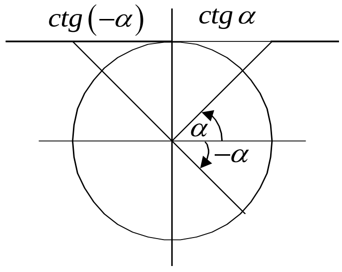
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–



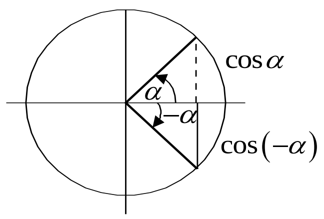
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ (нечёт-



$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$ (нечёт-



$ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$ (нечёт-



$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (чётная

ЗАДАНИЕ:

Вариант 1

1. Переведите углы из радианов в градусы, отметьте их на единичной окружности и определите четверть, в которой находятся углы: $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{10}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{5}$; 3π.
2. Переведите углы из градусов в радианы, отметьте их на единичной окружности и определите четверть, в которой находятся углы: 25^0; 40^0; 150^0; 90^0; 18^0.
3. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки (1;0) на угол: $\frac{\pi}{2}$; -90^0; $-\pi$; 180^0; 2π; 450^0
4. Вычислите:
$$\cos 0^0 + 3\sin 90^0$$
$$6tg180^0 + 3ctg\,90^0$$
$$\sin 45^0 + \cos 45^0$$
$$\sin^2 60^0 + \cos^2 30^0$$
5. Вычислите $\sin\alpha$, $tg\alpha$ и $ctg\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Вариант 2

1. Переведите углы из радианов в градусы, отметьте их на единичной окружности и определите четверть, в которой находятся углы: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{20}$; $\frac{11\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{7}$; 4π.
2. Переведите углы из градусов в радианы, отметьте их на единичной окружности и определите четверть, в которой находятся углы:
125^0; 80^0; 140^0; 270^0; 10^0.
3. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки (1;0) на угол: $-\frac{\pi}{2}$; 90^0; π; -180^0; -2π; -450^0
4. Вычислите:
$$\cos 0^0 + 2\sin 0^0$$
$$5tg180^0 + 7ctg\,90^0$$
$$\sin 60^0 + \cos 30^0$$
$$\sin^2 60^0 + \cos^2 60^0$$
5. Вычислите $\sin\alpha$, $tg\alpha$ и $ctg\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Контрольные вопросы

1. Определения тригонометрических функций острого угла.
2. Что называется синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом числового аргумента?
3. Знаки функций по четвертям.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

Тема: «Преобразование графиков функций»

Цель работы:

❖ Закрепить умение строить графики степенных, показательных и логарифмических функций

❖ Научиться преобразовывать графики, не используя вспомогательные таблицы для построения графиков

Оборудование и принадлежности: листы формата А 4 для практических работ.

Литература:

Руководство по выполнению заданий .

Теоретические сведения:

Функция вида $y = x^n$ называется степенной функцией.

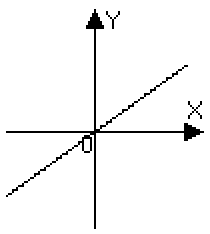
x – аргумент (основание степени)

n – показатель степени.

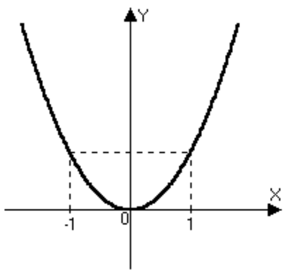
Рассмотрим графики функций при $n = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{2}{3}$

При n > 0

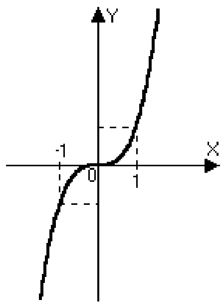
n = 1 y = x



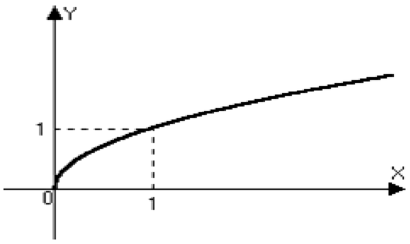
$n = 2 \quad y = x^2$



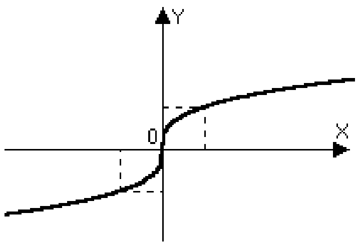
$n = 3 \quad y = x^3$



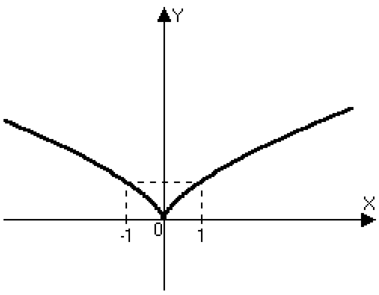
$n = \frac{1}{2} \quad y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$; $x \geq 0$



$n = \frac{1}{3} \quad y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$; $x \in R$

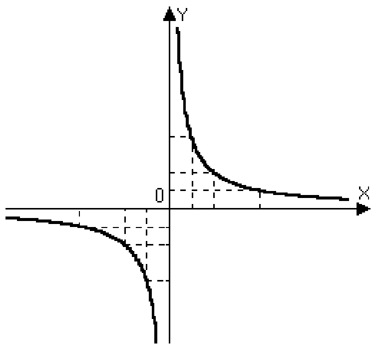


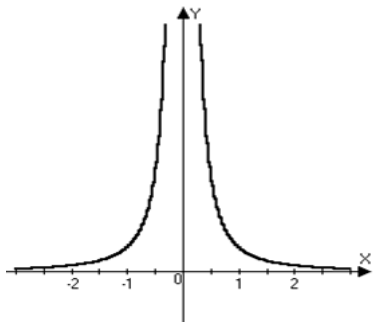
$n = \frac{2}{3} \quad y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ $x \in R; \ y > 0$

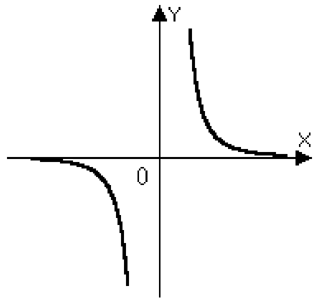


При n < 0

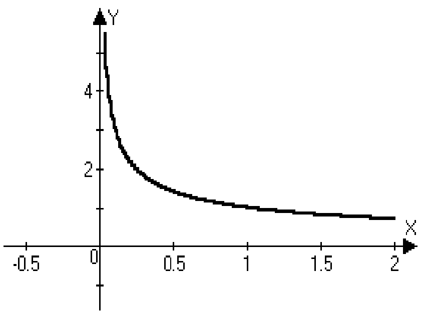
$n=-1;\ y=x^{-1}=\dfrac{1}{x};\quad x\neq 0$ $\qquad n=-2;\ y=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2};\quad x\neq 0$ $\qquad n=-3;\ y=x^{-3}=\dfrac{1}{x^3};\quad x\neq 0$

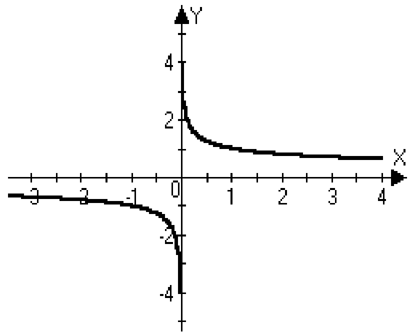


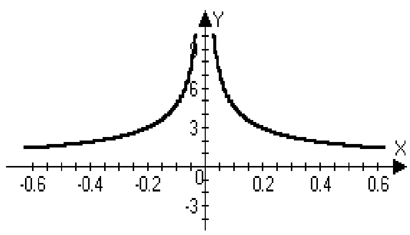




$n=-\dfrac{1}{2};\quad y=x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}};\quad x>0$ $\qquad n=-\dfrac{1}{3};\quad y=x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}};\quad x\neq 0$ $\qquad n=-\dfrac{2}{3};\quad y=x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}};\quad x\neq 0$







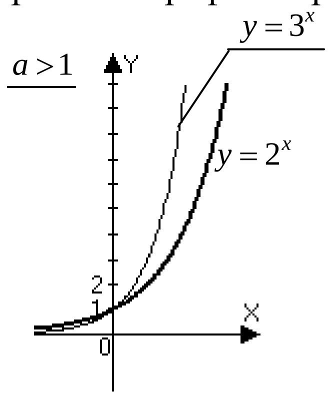
<u>Определение</u>. Функция вида $y=a^x$, где $a\neq 1$ и $a>0$ называется показательной.

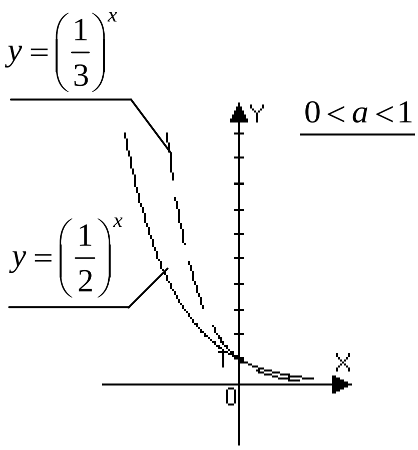
Рассмотрим функции.

$y=2^x;\qquad y=3^x\qquad (a>1)$

$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x;\ y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\quad (a<1)$

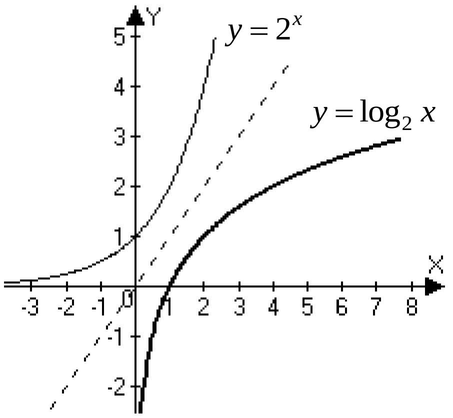
построим их графики прочтём свойства функций.

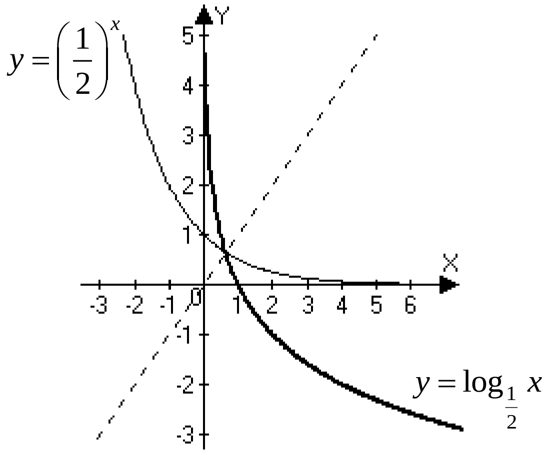




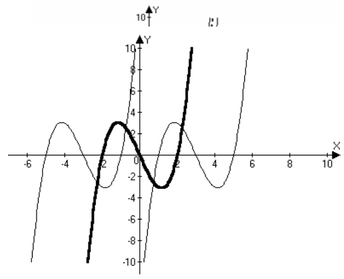
Функция, обратная показательной, называется логарифмической $y=a^x$, $a\neq 1$ и $a>0$ – показательная функция $x=\log_a y$, поменяем местами x и y, получаем $y=\log_a x,\quad a\neq 1,\quad a>0$ – это и есть логарифмическая функция.

Знаем, что графики обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов. Воспользовавшись этим свойством изобразим графики логарифмической функции при a > 1 и a < 1



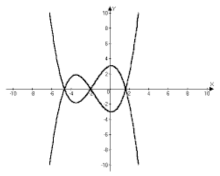


1) **y = f(x) + b** – график функции получается из графика функции y = f(x) путем параллельного переноса этого графика на величину вдоль от ОУ. при этом, если b>0, то график функции f(x) + b располагается выше графика функции f(x), если b<0, то ниже этого графика.



2) **y = f (x + b)** – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью параллельного переноса этого графика на величину b вдоль оси ОХ, при этом, если b>0, то сдвиг влево, а если b<0, то сдвиг вправо.

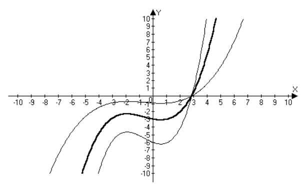
3) **y = - f(x)** – график симметричен графику y = f(x) относительно оси OX



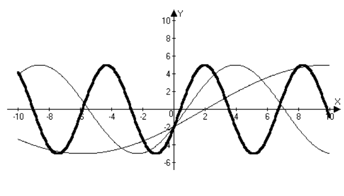
Указанные преобразования не изменяют масштаба графика функции.

Рассмотрим преобразования графиков функций, которые изменяют масштаб графика

4) y = af(x) – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью растяжения или сжатия графика по оси ОУ пропорционально коэффициенту *a*, причем, если *a* > 1, то все ординаты графика af(x) увеличиваются в *a* раз, если a < 1, то уменьшаются в *a* раз.

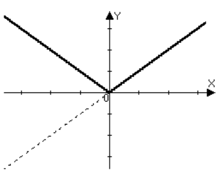


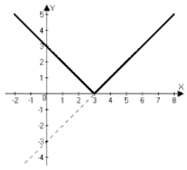
5) y = f(ax) – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью растяжения или сжатия вдоль оси ОХ пропорционально коэффициенту *a*, причем, если, *a* > 1, то график сжимается в *a* раз, если 0 < a <1, то растягивается в 1/*a* раз.

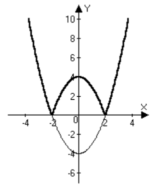


6) y = $|f(x)|$ - для построения этого графика нужно построить график функции y = f(x) и отобразить относительно оси ОХ те части графика, которые расположены ниже этой оси.

y = $|x|$ y = x – 3; y = $|x-3|$ y = $|x^2-4|$ y = $x^2 - 4$







ЗАДАНИЕ:

Построить графики функций попарно в одной системе координат (изначальный и преобразованный, без построения вспомогательной таблицы значений)

1 вариант 1.1) $y=x^2$ 1.2) $y=x^2+2x+3$; 2.1) $y=\sqrt{x}$ 2.2) $y=2\sqrt{x}$; 3.1) $y=\frac{1}{x}$ 3.2) $y=-\frac{6}{x}$.	**2 вариант** 1.1) $y=x^2$ 1.2) $y=x^2-4x$; 2.1) $y=\sqrt{x}$ 2.2) $y=\sqrt{2x}$; 3.1) $y=\frac{1}{x}$ 3.2) $y=\frac{4}{x}$.	**3 вариант** 1.1) $y=x^2$ 1.2) $y=-x^2+2x-1$; 2.1) $y=\sqrt{x}$ 2.2) $y=-\sqrt{x}$; 3.1) $y=\frac{1}{x}$ 3.2) $y=\frac{3}{2x}$.
4 вариант 1.1) $y=x^2$ 1.2) $y=-x^2+\frac{1}{2}x$; 2.1) $y=\sqrt{x}$ 2.2) $y=-\sqrt{3x}$; 3.1) $y=\frac{1}{x}$ 3.2) $y=-\frac{2}{3x}$.	**5 вариант** 1.1) $y=x^2$ 1.2) $y=-2x^2+3x$; 2.1) $y=\sqrt{x}$ 2.2) $y=\sqrt{\frac{x}{2}}$; 3.1) $y=\frac{1}{x}$ 3.2) $y=\frac{9}{x}$.	**6 вариант** 1.1) $y=x^2$ 1.2) $y=x^2+\frac{1}{2}x+3$; 2.1) $y=\sqrt{x}$ 2.2) $y=3\sqrt{x}$; 3.1) $y=\frac{1}{x}$ 3.2) $y=-\frac{6}{5x}$.
7 вариант 1.1) $y=x^2$ 1.2) $y=x^2-6x$; 2.1) $y=\sqrt{x}$ 2.2) $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}$; 3.1) $y=\frac{1}{x}$ 3.2) $y=\frac{2}{x}$.	**8 вариант** 1.1) $y=x^2$ 1.2) $y=-x^2+8x+1$; 2.1) $y=\sqrt{x}$ 2.2) $y=-\frac{1}{3}\sqrt{x}$; 3.1) $y=\frac{1}{x}$ 3.2) $y=-\frac{3}{x}$.	**9 вариант** 1.1) $y=x^2$ 1.2) $y=-2x^2+x-3$; 2.1) $y=\sqrt{x}$ 2.2) $y=\frac{\sqrt{x}}{2}$; 3.1) $y=\frac{1}{x}$ 3.2) $y=-\frac{5}{x}$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется функцией?
2. Что является графиком линейной, квадратичной функций?
3. Как построить график функции, используя простейшие преобразования графика?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7

Тема: «Решение стереометрических задач»

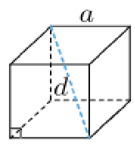
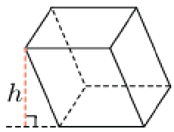
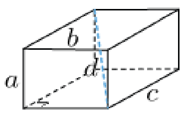
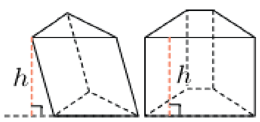
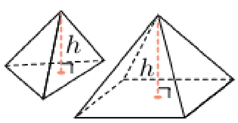
Цель работы:

- ❖ Приобрести навыки логического построения модели задачи
- ❖ Закрепить умение подбирать нужные формулы, для решение конкретной задачи
- ❖ Закрепить умение выражать из формул необходимые переменные
- ❖ Закрепить навыки построения сечений

Оборудование и принадлежности: листы формата А 4 для практических работ.

Руководство по выполнению заданий .

Теоретические сведения:

 Куб	$V = a^3$	$S = 6a^2$ $d = a\sqrt{3}$ d - диагональ
 Параллелепипед	$V = S_{осн}h$ h - высота	
 Прямоугольный параллелепипед	$V = abc$	$S = 2ab + 2bc + 2ac$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 Призма	$V = S_{осн}h$	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$
 Пирамида	$V = \frac{1}{3}S_{осн}h$	$S = S_{осн} + S_{бок}$

Сечения куба плоскостью

Если плоскость пересекает три ребра куба, выходящих из одной вершины, то в сечении получается треугольник (рис. 1 слева). При этом если отсекаемые плоскостью отрезки ребер равны, то в сечении получается равносторонний треугольник, если равны два отрезка из трех, то получается равнобедренный треугольник, наконец, если все три отрезка различны, то в сечении получается разносторонний треугольник.

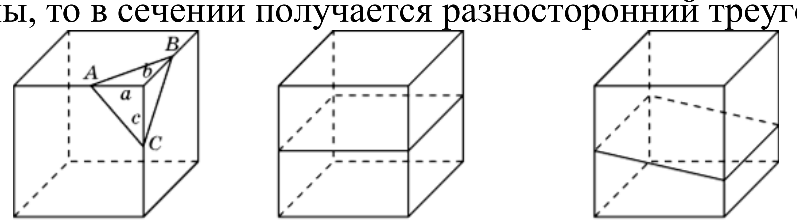


Рисунок 1. Сечения куба плоскостью

В сечении куба плоскостью не могут получаться прямоугольный или тупоугольный треугольники.

Выясним, какие четырехугольники могут получаться в сечении куба плоскостью. Ясно, что если плоскость параллельна одной из граней куба, то в сечении получается квадрат (рис. 1 посередине). Если плоскость параллельна одному из ребер куба, то в сечении получается прямоугольник (1. 48 справа). Если плоскость пересекает четыре параллельных ребра куба, то в сечении получается параллелограмм (рис. 2 слева).

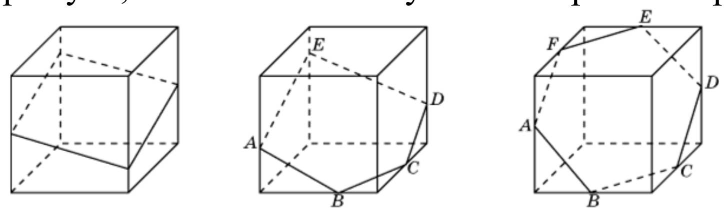


Рисунок 2. Сечения куба плоскостью

На рис. 2 посередине показано сечение куба плоскостью в форме пятиугольника *ABCDE*. Прямые *AB* и *DE*, *CD* и *AE* параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

На рис. 2 справа показано сечение куба плоскостью в форме шестиугольника *ABCDEF*. Прямые *AB* и *DE*, *BC* и *EF*, *CD* и *AF* параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

Поскольку у куба имеется только шесть граней, то в сечении куба плоскостью не может получиться многоугольник с числом сторон, большим шести.

Построение сечений многогранников

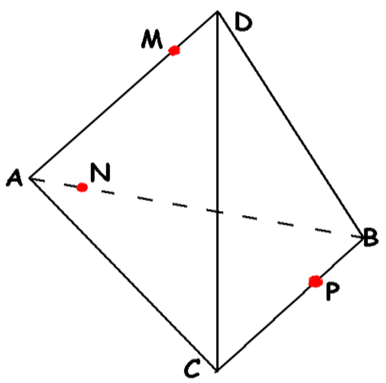
Для построения сечений используют метод «следов», заключающийся в нахождении точки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам этой прямой и их проекциям на плоскость.

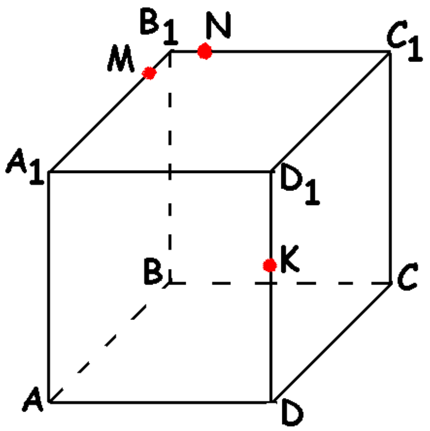
Контрольные вопросы:

1. Как найти площадь полной поверхности прямой треугольной призмы?
2. Как найти площадь полной поверхности куба?
3. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) трапеция; б) равнобедренная трапеция; в) неравнобедренная трапеция; г) прямоугольная трапеция; д) тупоугольная трапеция?
4. Какие могут быть сечения правильного тетраэдра плоскостью?

ЗАДАНИЕ:
Вариант 1
Решите задачи

1. Найдите площадь полной поверхности треугольной прямой призмы со сторонами основания 3, 4 и 5м, и высотой 8м.
2. Найдите ребро куба, если площадь его полной поверхности равна 42дм2.
3. Сколько рулонов обоев надо купить для оклейки комнаты, если размеры рулона 0,5 на 10м, а размеры комнаты 6 на 4м при высоте потолка 2,5м (без учёта окон и дверей)?
4. Найдите площадь боковой поверхности и площадь полной поверхности правильного тетраэдра с ребром 6см.
5. Постройте сечение тетраэдра через точки M, N и P.
6. Постройте сечение куба через точки M, N и K.





ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №8

Тема: «Вычисление площадей поверхностей геометрических тел»

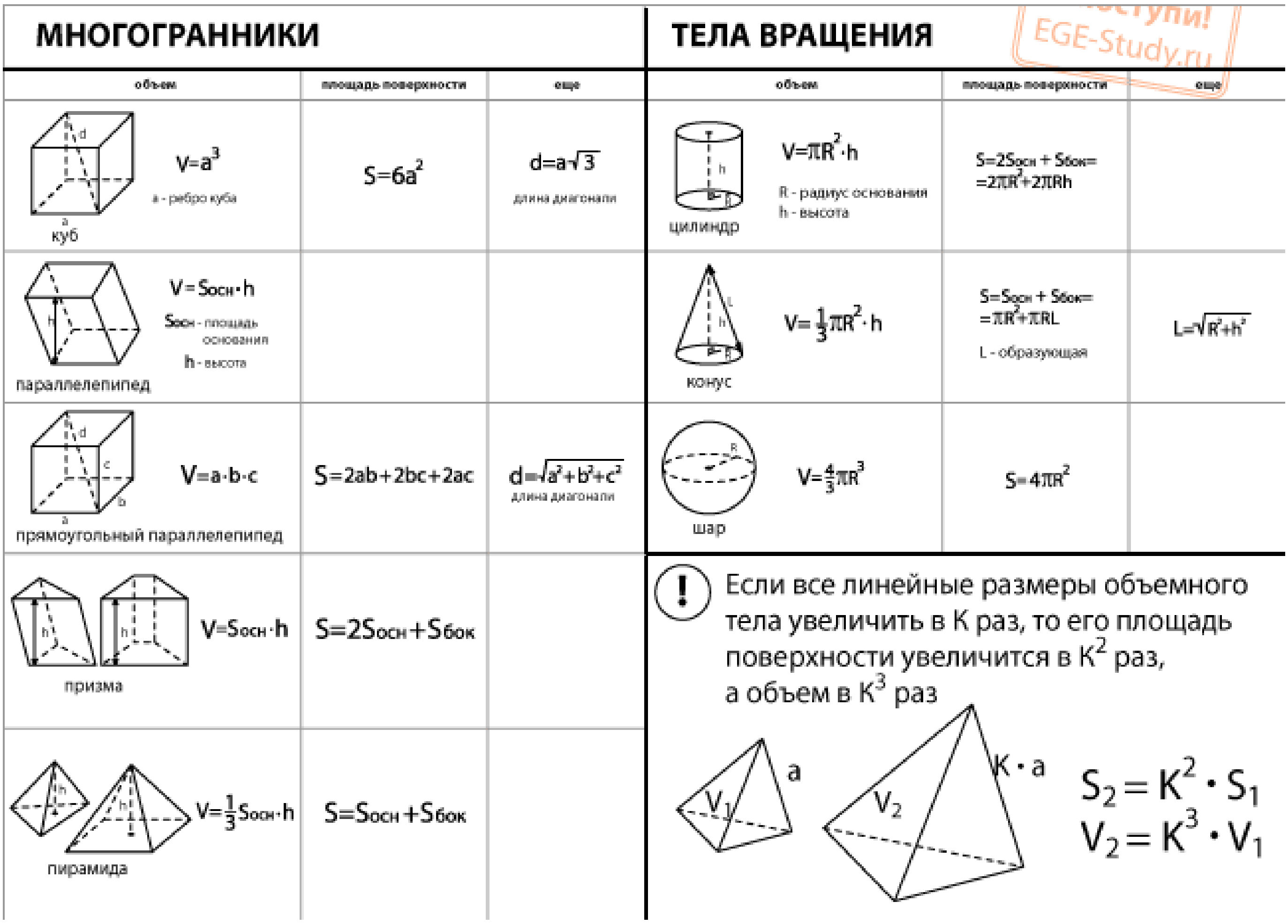
Цель работы:

- ❖ Приобрести навыки логического построения модели задачи
- ❖ Закрепить умение подбирать нужные формулы, для решение конкретной задачи
- ❖ Закрепить умение выражать из формул необходимые переменные

Оборудование и принадлежности: листы формата А 4 для практических работ.

Руководство по выполнению заданий .

Теоретические сведения:



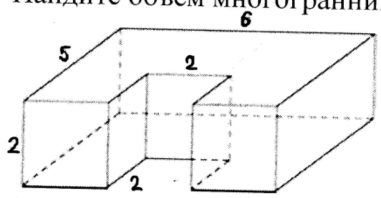
Контрольные вопросы:

1. Как найти площадь поверхности четырехугольной прямой призмы?
2. Как найти площадь четырехугольной правильной пирамиды?
3. Как найти площадь поверхности сферы?

ЗАДАНИЕ:

Вариант 1

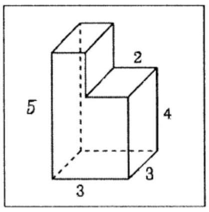
- В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 30м и 72м. Площадь ее поверхности равна 6216м2. Найдите боковое ребро этой призмы.
- Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



- Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 42м, боковые рёбра равны 29м. Найдите площадь поверхности пирамиды.
- Цилиндр и конус имеют общее основание с радиусом 6см и высоту 8см. На сколько площадь поверхности цилиндра больше, чем площадь поверхности конуса?
- Площадь поверхности сферы равна 256π см^2. Найдите диаметр этой сферы.

Вариант 2

- В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 15см и 20см. Площадь ее поверхности равна 850см2. Найдите боковое ребро этой призмы.
- Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



- Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 12м, боковые рёбра равны 15м. Найдите площадь поверхности пирамиды.
- Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите площади поверхностей цилиндра и параллелепипеда.
- Площадь поверхности сферы равна 144π см^2. Найдите диаметр этой сферы.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №9

Тема: «Применение производной к исследованию функций и построению графиков»

Цель работы:

- Приобрести навыки логического построения модели задачи
- Закрепить умение подбирать нужные формулы, для решение конкретной задачи
- Закрепить умение выражать из формул необходимые переменные
- Закрепить умение построения геометрических тел

Оборудование и принадлежности: листы формата А 4 для практических работ.

Руководство по выполнению заданий .

Теоретические сведения:

Табличные значения производных элементарных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций:

$c'=0$ $(x^n)'=nx^{n-1}$ $(kx+b)'=k$ $(e^x)'=e^x$ $(a^x)'=a^x\ln a$ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$ $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции

Пусть функция $y=f(x)$, $x\in(a;b)$, имеет производную в точке $x_0\in(a;b)$, а функция $z=f(x)$ имеет производную в точке $y_0=g(x_0)$. Тогда сложная функция $z(x)=f(g(x))$ имеет производную в точке x_0, которая вычисляется по формуле:

$$z'(x_0)=(f(g(x_0))'=f'(y_0)\cdot g'(x_0).$$

Пример 1.

Вычислите производную функции $y=(x^2+3x+10)^2$.

Решение:

представим заданную функцию как композицию квадратичной функции и степенной

$$y=(x^2+3x+10)^2;\quad f(x)=(g(x))^2;$$
$$g(x)=x^2+3x+10;$$
$$f'(x)=((g(x))^2)'=2g(x)\cdot(g(x))';$$
$$y'=2(x^2+3x+10)\cdot(x^2+3x+10)'=2(x^2+3x+10)(2x+3).$$

Физический смысл производной.

Итак, мы видим, что по аналогии с мгновенной скоростью, производная функции в точке x_0. показывает скорость изменения функции в этой точке.

Если зависимость расстояния от времени представляет собой функцию $S(x)$, то, чтобы найти скорость тела в момент времени t_0, нужно найти значение производной функции $S(x)$ в точке t_0:

$v(t_0)=S'(t_0)$, так же $a(t_0) = \vartheta'(t_0)$

Пример 2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=6t^2-48t+17$, где $x(t)$ — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=9c$.

Решение.

1. Найдем производную функции $x(t)=6t^2-48t+17$:

$x'(t)=12t-48$

2. Найдем значение производной в точке $t=9$:

$x'(9)=12\times 9-48$

$x'(9)=60$

Ответ: 60 м/с.

Общая схема построения графиков функций:

1) найти область определения функции;
2) найти точки пересечения графика функции с осями координат;
3) найти промежутки монотонности функции и экстремумы функции;
4) найти промежутки выпуклости и точки перегиба;
5) построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Пример 3.

Исследовать функцию $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ и построить ее график.

Решение:

1) Данная функция является многочленом (можно раскрыть скобки, получим многочлен третьей степени), поэтому она определена, непрерывна и дифференцируема при любых x. Поэтому область определения функции – вся числовая прямая.

2) Вычислим точки пересечения графика функции с осями координат: график функции $y=(x+1)\cdot(x–2)^2$ пересекает ось Оx при $y=0$, т. е.

$$(x+1)\cdot(x-2)^2=0;$$

$$x+1=0 \text{ или } (x-2)^2=0;$$

$$x=-1 \text{ или } x=2.$$

График функции $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ пересекает ось Оy при $x=0$, т. е.

$$y=(0+1)\cdot(0-2)^2=1\cdot 4=4.$$

Т.о. мы получили три точки: (–1; 0), (2; 0), (0; 4).

3) Найдем промежутки монотонности функции и ее экстремумы с помощью первой

производной:

$$y'=((x+1)\cdot(x-2)^2)'=3x\cdot(x-2).$$

Из уравнения $y'=0$ найдем критические точки:

$$3x\cdot(x-2)=0;$$

$$x_1=0,\ x_2=2.$$

Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$
	возрастает	max	убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$, убывает на интервале $(0; 2)$, имеет максимум при x=0 и минимум при x=2: $y_{max}=y(0)=4$; $y_{min}=y(2)=0$.

4) Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба с помощью второй производной: $y''=(3x\cdot(x-2))'=6\cdot(x-1)$.

Кривая выпукла там, где $y''<0$, т. е. $6\cdot(x-1)<0$, $x<1$.

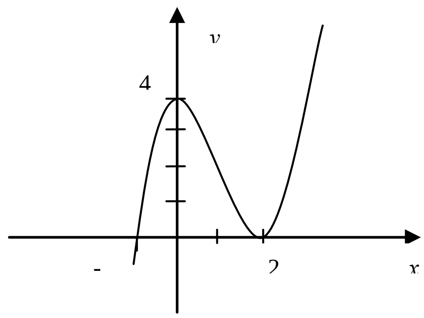
Кривая вогнута там, где $y''>0$, т. е. $x>1$.

На интервале $(-\infty, 1)$ кривая выпукла; на интервале $(1, +\infty)$ – вогнута.

Точку перегиба найдем из уравнения $y''=0$. Т. о., $x=1$ – абсцисса точки перегиба, т.к. эта точка разделяет интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Ордината точки перегиба: $y(1)=2$.

Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	-	0	+
y		2	
	выпукла	перегиб	вогнута



5) По полученным точкам строим график:

Рисунок . График функции $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$

ЗАДАНИЕ:

Вариант 1

1. Найти производную функции

$$y=\left(x^4-2x^2-1\right)^7$$

2. Найти V(2), a(2), если

$$S=t^3+5t^2-4t-5$$

3. Исследовать и построить график функции

$$y=2x^3-6x^2-18x+7$$

Вариант 2

1. Найти производную функции

$$y=\ln\left(4x^3+2x+5\right)$$

2. Найти V(1), a(1), если

$$S=2t^3+3t^2+2t-1$$

3. Исследовать и построить график функции

$$y=x^4-2x^2-5$$

Вариант 3

1. Найти производную функции

$$y=\cos(3x-2x^2)$$

2. Найти V(3), a(3), если

$$S=2t^3+4t^2-3t+5$$

3. Исследовать и построить график функции

$$y=\frac{2}{3}x^3+x^2-4x-2$$

Вариант 4

1. Найти производную функции

$$y=e^{2x^3+4}$$

2. Найти V(1), a(1), если

$$S=\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+3t$$

3. Исследовать и построить график функции

$$y=2x^3-3x^2$$

Вариант 5

1. Найти производную функции

$$y=\sqrt{\left(2x^2-5\right)}$$

2. Найти V(4), a(4), если

$$S=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4}t^2+5$$

3. Исследовать и построить график функции

$$y=x^3-3x^2+7$$

Вариант 6

1. Найти производную функции

$$y=\sin\left(4-x^3\right)$$

2. Найти V(3), a(3), если

$$S=3t^3-t^2+4t-1$$

3. Исследовать и построить график функции

$$y=3x^4+16x^3+18x^2$$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте правила вычисления производных сложной функции.
2. В чем заключается физический смысл производной?
3. Расскажите общую схему исследования и построения графика функции.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №10

Тема: «Вычисление объемов поверхностей геометрических тел»

Цель работы:

- Приобрести навыки логического построения модели задачи
- Закрепить умение подбирать нужные формулы, для решение конкретной задачи
- Закрепить умение выражать из формул необходимые переменные
- Закрепить умение построения геометрических тел

Оборудование и принадлежности: листы формата А 4 для практических работ.

Руководство по выполнению заданий .

Теоретические сведения:

Объем прямоугольного параллелепипеда

$V=abc$, где a, b, c – стороны параллелепипеда.

Объем куба

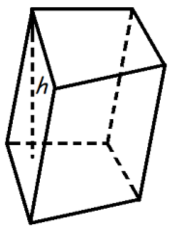
$V=a^3$, где a – длина грани куба.

Объем призмы

Объем призмы равен произведению площади основания призмы, на высоту:

$$V=S_o h,$$

где $S_о$ – площадь основания призмы, h – высота призмы.

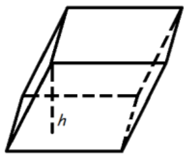


Объем параллелепипеда

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту:

$$V=S_o \cdot h,$$

где $S_о$ – площадь основания, h – длина высоты.

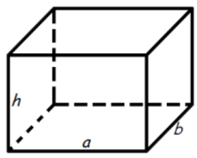


Объем прямоугольного параллелепипеда

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты:

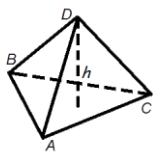
$$V=a\cdot b\cdot h,$$

где a – длина, b – ширина, h – высота.



Объем пирамиды

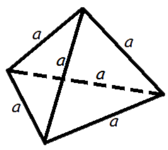
Объем пирамиды равен трети от произведения площади ее основания на высоту:



$V=\dfrac{1}{3}S_o h$, где $S_о$ – площадь основания пирамиды, h – длина высоты пирамиды.

Объем правильного тетраэдра

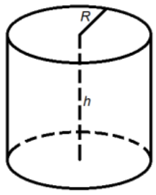
$$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12},$$



где a – длина ребра правильного тетраэдра.

Объем цилиндра

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:



$$V=\pi R^2 h$$

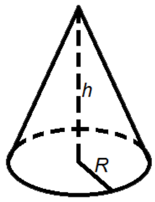
или

$$V=S_o h,$$

где S_o – площадь основания цилиндра, R – радиус цилиндра, h – высота цилиндра, π=3,141592.

Объем конуса

Объем конуса равен трети от произведения площади его основания на высоту:



$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$$

или

$$V=\frac{1}{3}S_o h,$$

где S_o – площадь основания конуса, R – радиус основания конуса, h – высота конуса, π=3,141592.

Объем шара

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

где R – радиус шара, π=3,141592.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы объемов тел и поверхностей вращения.

ЗАДАНИЕ:

Из каждого раздела необходимо решить **<u>одну</u> задачу!**

1. **Куб**
   1. Вычислите объём и площадь поверхности куба с ребром 4,2м.
   2. Объём куба равен 64дм^3. Найдите его ребро и площадь поверхности.
   3. .Площадь поверхности куба равна 384см^2. Найдите его ребро и объём.
2. **Параллелепипед**
   1. Найдите объём и площадь поверхности параллелепипеда с размерами 2,3см, 3,1см и 4см.
   2. У параллелепипеда известны два ребра 14дм и 6дм и объём, равный 1092дм^3. Найдите третье его ребро и площадь его поверхности.
   3. Площадь поверхности параллелепипеда равна 292м^2. Два его ребра равны 6м и 7м. Найдите третье его ребро и объём.
3. **Призма**
   1. Найдите объём четырёхугольной прямоугольной призмы с основанием 2 на 4м и высотой 6м.
   2. В треугольной призме с высотой 6м в основании находится прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4дм. Найдите её объём и площадь поверхности.
   3. Найдите объём и площадь поверхности правильной шестиугольной призмы с высотой 9см и стороной основания 10см.
4. **Пирамида**
   1. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания 3см и высотой 7см.
   2. Найдите сторону основания правильной четырёхугольной пирамиды с высотой 6дм и объёмом 128дм^3.
   3. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 8м, а угол между боковой гранью и основанием равен 45^0. Найдите объём пирамиды.
5. **Конус**
   1. Высота конуса равна 4см, образующая равна 5см. Найдите объём и площадь поверхности конуса.
   2. Угол между образующими конуса равен 90^0. Диаметр основания равен 6дм. Найдите его объём и площадь поверхности.
   3. Площадь основания конуса равна 16м^2, а площадь боковой поверхности 24м^2. Найдите образующую конуса.
6. **Цилиндр**
   1. Найдите объём и площадь поверхности цилиндра с радиусом основания 2,6см и высотой 4,2см.
   2. Осевое сечение цилиндра – прямоугольник, площадью 54см^2 и высотой 9см. Найдите его объём и площадь поверхности.
   3. Длина окружности основания цилиндра равна 6π дм. Площадь боковой поверхности равна 48π дм^2. Найдите высоту и объём цилиндра.
7. **Шар, сфера**
   1. Найдите объём шара радиуса 3см.
   2. Площадь большого круга шара равна 49π дм^2. Найдите его площадь поверхности и объём.
   3. Во сколько раз увеличатся объём и площадь поверхности сферы, если её радиус увеличить в три раза?

Задача №1 = 3 балла
Задача №2 = 4 балла
Задача №3 = 5 баллов
Сумма баллов 21-25: оценка 3 «уд»
Сумма баллов 26-30: оценка 4 «хор»
Сумма баллов 31-35: оценка 5 «отл»

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №11

Тема: «Решение комбинаторных задач»

Цель работы:

- научиться выбирать нужную формулу для решения конкретной задачи
- закрепить умение считать количество перестановок, размещений и сочетаний
- закрепить умение пользоваться треугольником Паскаля

Оборудование и принадлежности: листы формата А 4 для практических работ.

Руководство по выполнению заданий .

Теоретические сведения:

Соединения, их виды

Группы, составленные из каких – либо элементов, называются *соединениями*. Различаю три основных вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания*.

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Перестановки представляют частный случай размещений из n элементов по n в каждом.

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n\,,$$

$n!$-читается «n-факториал», причем 0!=1 и 1!=1.

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Причем, $C_n^n = 1;\ C_n^0 = 1;\ C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$

Формула бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n\,.$$

Иными словами, число сочетаний из n по k равно коэффициенту при члене $a^{n-k}b^k$ в разложении n-ой степени двучлена (a+b) поэтому числа сочетаний называют иначе *биномиальными коэффициентами*.

Треугольник Паскаля – бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Назван треугольник в честь Блеза Паскаля.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
………………………………………………………

Первая строка в этой таблице содержит биномиальные коэффициенты для n=1; вторая – для n=2; третья – для n=3 и т.д.

Пример.

Разложить выражение: $(a+b)^7$.

Решение:

мы можем получить результат моментально, используя из таблицы разложение по седьмой строке (т.к. седьмая степень двучлена):

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7 .$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение соединения, их виды?
2. Приведите формулы для вычисления разных видов соединений.
3. Сформулируйте принцип построения треугольника Паскаля.

ЗАДАНИЕ:
Вариант 1

1. В алфавите племени «АБ» имеются только 2 буквы «а» и «б». Сколько различных трёхбуквенных слов можно составить, используя этот алфавит? 9составьте дерево возможных вариантов)
2. Запишите все двузначные числа, состоящие из цифр 9, 1 и 0
   - Сколько их с повторениями?
   - Сколько их без повторений цифр?
3. Сколькими способами можно прочитать слово «строка»?

   строка
   трока
   рока
   ока
   ка
   а

4. Вычислите: A_8^3 $\quad \dfrac{6!+2!+4}{3!}$ $\quad \dfrac{P_4-P_3}{P_2}$ $\quad C_5^3$
5. Возведите в степень: $(a-b)^4$ $\quad (x+2)^5$
6. Переплётчик должен переплести 12 книг в красный, зелёный и коричневый переплёты. Сколькими способами он может это сделать?
7. Сколько вариантов распределения трёх путёвок в разные санатории для семи претендентов возможно?
8. Сколько вариантов распределения трёх путёвок в один санаторий для семи претендентов возможно?

Сколько существует пятизначных симметричных чисел, которые одинаково читаются слева-направо и справа-налево?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №12

Тема: «Решение простейших задач теории вероятности и математической статистики»

Цель работы:

- научиться выбирать нужную формулу для решения конкретной задачи
- закрепить умение считать количество перестановок, размещений и сочетаний
- закрепить умение пользоваться треугольником Паскаля

Оборудование и принадлежности: листы формата А 4 для практических работ.

Руководство по выполнению заданий .

Теоретические сведения:

Случайные события

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется *событием*.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным*.

В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют *достоверным*, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, *невозможным*.

События называются *несовместными*, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются *противоположными*, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных исходов m, к числу всех возможных исходов n: $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т. е. $0 \le P(A) \le 1$.

Невозможному событию соответствует вероятность $P(A)=0$, а достоверному – вероятность $P(A)=1$.

Вероятность несовместных событий

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Вероятность совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Пусть вероятность события B не зависит от появления события A.

Событие B называют *независимым от события A*, если появление события A не изменяет вероятности события B, т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности: $P_A(B) = P(B)$.

Итак, если событие B не зависит от события A, то событие A не зависит от события B; это означает, что *свойство независимости событий взаимно*.

Для независимых событий теорема умножения имеет вид: $P\ (AB) = P\ (A)\cdot P\ (B)$,

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Два события называют *независимыми*, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют *зависимыми*.

На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Несколько событий называют *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы. Например, события A, B, C попарно независимы, если независимы события A и B, A и C, B и C.

Случайное событие может состоять, в частности, в появлении некоторого числа, значение которого не может быть однозначно определено условиями его возникновение. Такие события называют случайными величинами. В этой трактовке мы сохраняем классический подход к понятию случайного события. Однако требование корректности в построении математических теорий заставляет нас вновь обратиться к аксиоматическому подходу, сохранив классические модели в качестве наглядных образцов из сферы практических приложений.

Математически корректно определить случайную величину как числовую функцию, заданную в пространстве элементарных событий.

Предположим вначале, что пространство элементарных событий является конечным множеством. Соответствующую ему случайную величину называют дискретной: она может принимать лишь конечное число значений, каждому из которых может быть сопоставлена вероятность его появления в опыте. Поэтому дискретные случайные величины можно задать таблицей вида:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Здесь буквой X обозначена случайная величина, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень всех ее возможных значений, а $p_1, \ldots, p_n$ – соответствующие им вероятности. Такую таблицу называют законом распределения дискретной случайной величины.

События $X=x_i$, (i=1, 2, ,3, …, n) являются несовместными и единственно возможными, т.е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице: $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=1$.

Случайные величины (дискретные и непрерывные) характеризуются своим законом распределения. Заметим, что это исчерпывающая характеристика в том смысле, что в законе распределения содержится вся информация о случайной величине. Никакой сколь угодно сложной математической обработкой наблюдаемых значений случайной величины о ней невозможно получить сведения, не содержащиеся в законе распределения. Однако этот закон часто неизвестен и о нем приходится судить на основе каких-то приближенных оценок. С другой стороны, для многих практических задач такая информация является избыточной: достаточно знать лишь некоторые количественные характеристики закона распределения.

Простейшей, но очень важной характеристикой является математическое ожидание.

Пусть, например, X - дискретная случайная величина распределена по закону:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Тогда ее *математическое ожидание $M(X)$* определяется равенством

$$M(X)=x_1 p_1+ x_2 p_2+\ldots+ x_n p_n.$$

Обратим внимание на то, что хотя конкретные значения величины X являются случайными, математическое ожидание $M(X)$ случайным не является.

Пусть, например, испытание состоит в бросании игрального кубика. Поскольку выпадение каждой грани равновозможно, Pi=1/6. Следовательно, математическое ожидание числа выпавших очков равно

$$M(X) = 1/6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6 = 3{,}5.$$

Число, близкое к этому, получится, если реально бросать кубик много раз и подсчитать сумму очков, деленную на число бросков.

Математическое ожидание и среднее арифметическое случайной величины - важные характеристики закона распределения, но, зная только их, мы имеем еще весьма одностороннее представление о нем. Не ясно, например, как велики могут быть отклонения значений величины от этих характеристик. Ведь одно и то же значение среднего арифметического наблюдаемых значений может получиться как в случае, когда все значения находятся вблизи среднего, так и в случае сколь угодно больших отклонений от него в сторону больших и меньших величин.

Для того чтобы характеризовать в среднем величины таких отклонений, вводится еще один важный параметр закона распределения, называемый дисперсией.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D\{X) = M[X- M(X)]^2.$$

Многие случайные величины, встречающиеся на практике, имеют размерность. Например, величины, которые встречаются при различных измерениях. Тогда, если, скажем, случайная величина измеряется в метрах, то дисперсия будет иметь размерность м^2. Поэтому вводится еще одна характеристика, называемая *средним квадратическим отклонением*, обозначается: $\sigma = \sqrt{D(X)}$. ее размерность совпадает с размерностью случайной величины.

Контрольные вопросы:

1. Классическое определение вероятности события
2. Теоремы суммы и произведения вероятностей
3. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?

ЗАДАНИЕ:

Решите задачи:

1. Результаты подсчёта деревьев в парке занесены в таблицу:

Породы	сосна	дуб	берёза	ель	осина	липа
количество	315	217	123	67	35	12

   Оцените вероятность того, что выбранное наугад в парке дерево будет: а) сосной, б) хвойным, с) лиственным. Вычислите среднее арифметическое всех пород деревьев, найдите моду и медиану по данным таблицы.
2. В предложенном ниже тексте вычислите вероятность появления букв «о» и «б».
   «Море - часть Мирового океана, более или менее обособленная сушей или возвышениями подводного рельефа и отличающаяся от открытой части океана главным образом гидрологическим, метеорологическим и климатическим режимом. Условно Морем называется также некоторые открытые части океанов, как, например, Саргассово море в северной части Атлантического океана и Филиппинское море в западной части Тихого океана. Некоторые озёра — Аральское, Мёртвое — называются Морями, а некоторые Моря — заливами (Гудзонов, Мексиканский, Персидский и др.).»
3. Оцените вероятность выпадения 4-х очков при подбрасывании тетраэдра, при подбрасывании гексаэдра, октаэдра, додекаэдра.
4. На экзамене 24 билета. Андрей не разобрался в одном билете и очень боится его вытянуть. Какова вероятность, что Андрею достанется «несчастливый» билет?
5. В лотерее 10 выигрышных и 240 билетов без выигрыша. Какова вероятность выигрыша в этой лотерее, если покупается один билет?
6. Задача Даламбера: Какова вероятность, что при двукратном бросании монеты, хотя бы один раз выпадет «орёл»?
7. Составьте закон распределения для знаменитой игры «Камень – ножницы – бумага»

8. В сумке лежат 12 красных, 10 зелёных и 3 жёлтых яблока. Какое яблоко вероятнее всего вынуть из сумки? Какова вероятность вынуть яблоко? Грушу? Зелёное яблоко? Не красное яблоко?
9. Вы выигрываете, если шар, вынутый вами из коробки – белый. Для какой из коробок вероятность выигрыша больше? А) в коробке 15 белых шаров из 45. б) в коробке 40 белых шаров из 120. в) в коробке 22 белых и 44 красных шара. Г) в коробке поровну белых, красных и чёрных шаров.
10. Из цифр 1, 3, 5, 7 и 9 составляют двузначное число. Какова вероятность того, что оно содержит цифры 1 и 3? 1 или 3?

---

11. Вычислите объём выборки, заданной статистическим распределением:

x	1	3	5	6
n	11	15	20	5

12. Вычислите математическое ожидание случайной величины, представленной в таблице:

x	2	7
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

13. Вычислите выборочное среднее для вариационного ряда:

x	1	3	4	5
n	1	2	2	5

14. В урне 10 шаров, имеющих номера от 1 до 10. Какова вероятность вытащить шар, с номером, меньшим 4?
15. Пароль состоит из 4-х букв. Каждая буква встречается один раз. Сколько вариантов паролей возможно составить их этих букв?
16. Один спортсмен попадает в мишень с вероятностью $\frac{5}{6}$, а второй – с вероятностью $\frac{4}{5}$. Оба спортсмена стреляют одновременно. Оцените вероятность того, что оба попадут в цель.

Перечень рекомендуемой учебной литературы, информационных ресурсов сети Интернет соответствует пункту 3.2. рабочей программы учебной дисциплины «Математика» всех специальностей